MA1111

Soluciones del Segundo Examen.

Horario 7:30pm. Tipo A.

1. **Límites.**

   Recuerde que

$$f(x) = \begin{cases} x+3 \text{ si } x > -3 \\ -x-3 \text{ si } x < -3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{\sin(x+3)}{|x+3|} = \lim_{x\to -3^+} \frac{\sin(x+3)}{x+3}$$

   Haciendo el cambio de variable $t = x+3$ nos queda

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{\sin(x+3)}{|x+3|} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-x^2+2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2+2} = 1$$

2. **Continuidad.**

   $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ pues $|x|$ es continua en todo punto de $\mathbf{R}$. Por otro lado, $f(x)$ es continua en $(-1,1)$, pues $|x^2-2|$ es composición de un polinomio (que es una función continua) con $g(t) = |t|$.

   Nos queda estudiar la continuidad en los puntos -1 y 1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} |x| = 1$$

   y

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} |x^2-2| = 1.$$

   Como

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 1,$$

tenemos que $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Para $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} |x^2 - 2| = 1$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} |x| = 1.$$

Como,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1,$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$.

3. **Recta tangente.**

   La funcin f es derivable en todo punto de su dominio. Por las reglas de derivación

$$f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow \tan^2(x) = 1$$

$$\tan(x) = 1 \quad \text{o} \quad \tan(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{\pi}{4},$$

   pero como $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, escogemos $x = \frac{\pi}{4}$.

   $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

   Por lo tanto, el punto que se pide es

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

   y la ecuación de la recta tangente es

$$y = \frac{1}{2}.$$